考研眞经总纲_数学篇

来源：
1 网络资源：

- 考试大纲
- 结构框架图
- 公式大全

2 考研数学复习全书（数学一）
3 考研眞题

数学一考研大纲

高等数学

一、函数 极限 连续

- 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系。
- 了解函数的有界性、单调性、周期性与奇偶性。
- 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。
- 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念。
- 理解极限的概念，理解函数左右极限的概念以及函数极限存在与左右极限之间的关系。
- 掌握极限的性质及四则运算法则。
- 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法。
- 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小两的比较方法，会用等价无穷小量求极限。
- 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判断函数间断点的类型。
- 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值与最小值定理、介值定理），并会应用这些性质。

二、一元函数微分学

- 理解导数与微分的概念，理解导数与微分的关系，理解导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程与法线方程，了解导数的物理意义，会用到导数描述一些物理量，理解函数的可导性与连续性之间的关系。

- 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式，了解微分的四则运算法则及一阶微分形式的不变性，会求函数的微分。
- 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数。
- 会求分段函数的导数，会求隐函数和由参数方程所确定的函数及反函数的导数。
- 理解并会用罗尔定理、拉格朗日中值定理、泰勒定理，了解并会用柯西中值定理。
- 掌握用罗必达法则求未定式极限的方法。
- 理解函数极值的概念，掌握用导数判别函数的单调性及求函数极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及应用。
- 会用导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图像的拐点，会求曲线的水平渐近线、铅直渐近线及斜渐近线，会描绘函数的草图。
- 了解曲率、曲率半径及曲率圆的概念，会计算曲率与曲率半径。

三、一元函数积分学

- 理解原函数的概念，理解不定积分与定积分的概念。
- 掌握不定积分的基本公式，掌握不定积分和定积分的基本性质及定积分的积分中值定理，掌握换元积分法和分部积分法。
- 会求有理函数、三角有理函数及简单无理函数的积分。
- 理解积分上限函数，会求其导数，掌握牛顿—莱布尼兹公式。
- 了解反常积分的概念，会计算反常积分。
- 掌握用定积分表达和计算一些几何量（面积、体积、弧长）及物理量（力和功）及函数的平均值。

四、向量代数与空间解析几何

- 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及表示。
- 掌握向量的运算，了解两个向量平行及垂直的条件。
- 理解单位向量、方向导数与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法。
- 掌握平面方程与直线方程及求法。
- 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，会利用平面、直线的位置关系解决相关问题。
- 会求点到直线及点到平面的距离。

- 了解曲面与空间曲线方程的概念。
- 了解常见二次曲面的方程及图形，会求简单的柱面和旋转曲面的方程。
- 了解空间曲线的参数方程及一般方程，了解空间曲线在坐标平面上的投影，会求该投影曲线的方程。

五、多元函数微分学

- 理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义。
- 了解二元函数的极限与连续的概念及有界闭区域上连续函数的性质。
- 理解多元函数的偏导数和全微分的概念，会求全微分，了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解全微分形式的不变性。
- 理解方向导数与梯度的概念，掌握其计算方法。
- 掌握多元复合函数一、二阶偏导数的求法。
- 了解隐函数存在定理，会求多元隐函数的偏导数。
- 了解空间曲线的切线与法平面及曲面的切平面与法线的概念，会求其方程。
- 了解二元函数的二阶泰勒公式。
- 理解多元函数的极值与条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值与最小值，会解决一些简单的应用问题。

六、多元函数积分学

- 理解二重积分与三重积分的概念，了解重积分的性质，了解二重积分的积分中值定理。
- 掌握二重积分的计算方法（直角坐标法与极坐标法），会计算三重积分（直角坐标法、柱面坐标法和球面坐标法）。
- 理解两类曲线积分的概念，了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分之间的关系。
- 掌握计算两类曲线积分的方法。
- 掌握格林公式，会运用平面曲线积分与路径无关的条件，会求二元函数全微分的原函数。
- 了解两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分之间的关系，掌握计算两类曲面积分的方法，掌握高斯公式计算曲面积分的方法，会用斯托克斯公式计算三维空间曲线积分。
- 了解散度与旋度的概念，会计算。
- 会用重积分、曲线积分与曲面积分求一些几何量和物理量。

七、无穷级数

- 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数和的概念，掌握级数的基本性质及收敛的必要条件。
- 掌握几何级数与p级数收敛与发散的条件。
- 掌握正项级数收敛性的比较判别法及比值判别法，会用根值判别法。
- 掌握交错级数的莱布尼兹判别法。
- 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念及绝对收敛与条件收敛的关系。
- 了解函数项级数收敛域及和函数的概念。
- 理解幂级数收敛半径的概念，掌握幂级数收敛半径、收敛区间和收敛域的求法。
- 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质（和函数连续性、逐项可导性与逐项可积性），会求一些幂级数的收敛区间内的和函数，会求某些常数项级数的和。
- 了解函数展开成泰勒级数的充要条件。
- 掌握x e，sinx，cosx，ln(1+x)及(1+x)^a的麦克劳林（Maclaurin）展开式，会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数.
- 了解傅里叶级数的概念和狄利克雷收敛定理，会将定义在[-l,l]上的函数展开为傅里叶级数，会将定义在[0,l]上的函数展开为正弦级数与余弦级数，会写出傅里叶级数的和函数的表达式.

八、常微分方程

- 了解微分方程及阶、解、通解、初始条件、特解的概念。
- 掌握可分离变量的微分方程和一阶线性微分方程的解法。
- 会解齐次微分方程、贝努力方程及全微分方程，会用简单的变量代换求一些微分方程。
- 会用降阶法解如下三种形式的微分方程：

$$y^{(n)} = f(x), f(x, y', y'') = 0, f(y, y', y'') = 0 \text{。}$$

- 理解线性微分方程解的性质与解的结构。
- 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程。
- 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数及其和与积的二阶常系数非齐线性微分方程。
- 会解欧拉方程。

- 会用微分方程解决一些简单的实际问题。

线性代数

一、行列式

- 了解行列式的概念，掌握行列式的性质。
- 会用行列式的性质和行列式按行（列）展开计算行列式。

二、矩阵

- 理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵，三角矩阵，对称矩阵和反对称矩阵及其性质。
- 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵行列式的性质。
- 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵。
- 理解矩阵初等变换的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法。
- 了解分块矩阵及运算。

三、向量

- 理解维向量，向量的线性组合与线性表示的概念。
- 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法。
- 理解向量组的极大线性无关组及向量组秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩。
- 理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行（列）向量组秩之间的关系。
- 了解维向量空间，子空间，基，维数及坐标的概念。
- 了解基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵。
- 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的方法。
- 了解规范正交基，正交矩阵的概念与性质。

四、线性方程组

- 会用克莱姆法则。
- 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐线性方程组有解的充分必要条件。

- 理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念，掌握齐次线性方程组基础解系和通解的求法。
- 理解非齐线性方程组解的结构和通解的概念。
- 掌握初等行变换求解线性方程组的方法。

五、矩阵的特征值与特征向量

- 理解矩阵的特征值与特征向量的概念与性质，会求矩阵的特征值与特征向量。
- 理解相似矩阵的概念、性质和矩阵相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法。
- 掌握实对称矩阵的特征值与特征向量的性质

六、二次型

- 掌握二次型及其矩阵表示，了解二次型秩的概念，了解合同变换和矩阵合同的概念，了解二次型的标准型，规范型及惯性定理。
- 掌握正交变换法化二次型为标准型的方法，会用配方法化二次型为标准型。
- 理解正定二次型及正定矩阵的概念，掌握判断正定的方法。

概率统计

一、随机事件与概率

- 了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件之间的关系及运算。
- 理解概念及条件概率的概念，掌握概率的基本性质，掌握概率的减法公式、加法公式、条件概率公式、乘法公式，全概率公式及贝叶斯公式，会计算古典概型和几何概型。
- 理解事件独立的概念，掌握独立事件的概率计算，理解独立重复试验的概念，掌握相关概率计算的方法。

二、随机变量及分布

- 理解随机变量的概念，理解分布函数的概念及性质，会计算随机变量相关的事件的概率。
- 理解离散型随机变量及概率分布的概念，掌握0-1分布、二项分布、几何分布、超几何分布、泊松分布及应用。
- 了解泊松定理的条件和结论，会用泊松分布近似表示二项分布。
- 理解连续型随机变量及概率密度的概念，掌握均匀分布、指数分布、正态分布及其应用。
- 会求随机变量函数的分布。

三、多维随机变量及分布

- 理解多维随机变量的概念，理解多维随机变量分布的概念与性质，理解二维离散型随机变量的分布律、边缘分布及条件分布，理解二维连续型随机变量的联合密度函数，边缘密度及条件密度，会求二维随机变量相关的概率。
- 理解随机变量独立及不相关的概念，掌握随机变量独立的条件。
- 掌握二维均匀分布、了解二维正态分布的概率密度，理解参数的概率意义。
- 会求两个随机变量简单函数的分布，会求多个独立随机变量函数的分布。

四、随机变量的数字特征

- 理解随机变量的数字特征（数学期望，方差，协方差，相关系数，标准差及矩）的概念，会用数字特征的基本性质，掌握常见随机变量的数字特征。
- 会求随机变量的函数的数学期望。

五、大数定律与中心极限定理

- 了解车比雪夫不等式。
- 了解车比雪夫大数定律，贝努利大数定律，辛钦大数定律。
- 了解隶美弗-拉普拉斯中心极限定理，列维-林德伯格中心极限定理。

六、数理统计的基本概念

- 理解总体，个体，简单随机样本，统计量，样本均值，样本方差，样本矩的概念。
- 了解正态总体常用的抽样分布。

七、参数估计

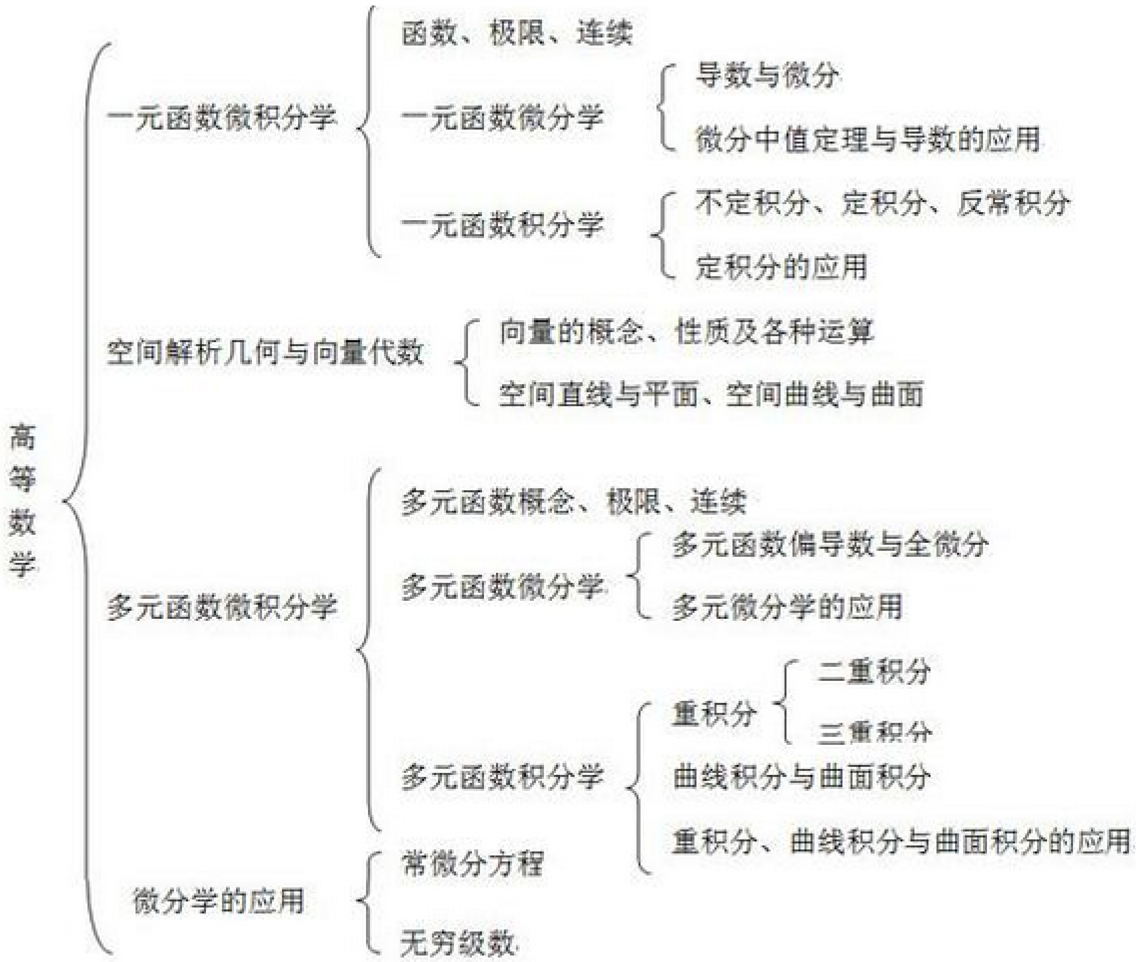
- 理解参数的点估计，估计量与估计值的概念。
- 掌握矩估计法及最大似然估计法。
- 了解估计量的无偏性，有效性及一致性的概念，会验证估计量的无偏性。
- 理解区间估计的概念，会求一个正态总体的均值与方差的置信区间，会求两个正态总体的均值差及方差比的置信区间。

八、假设检验

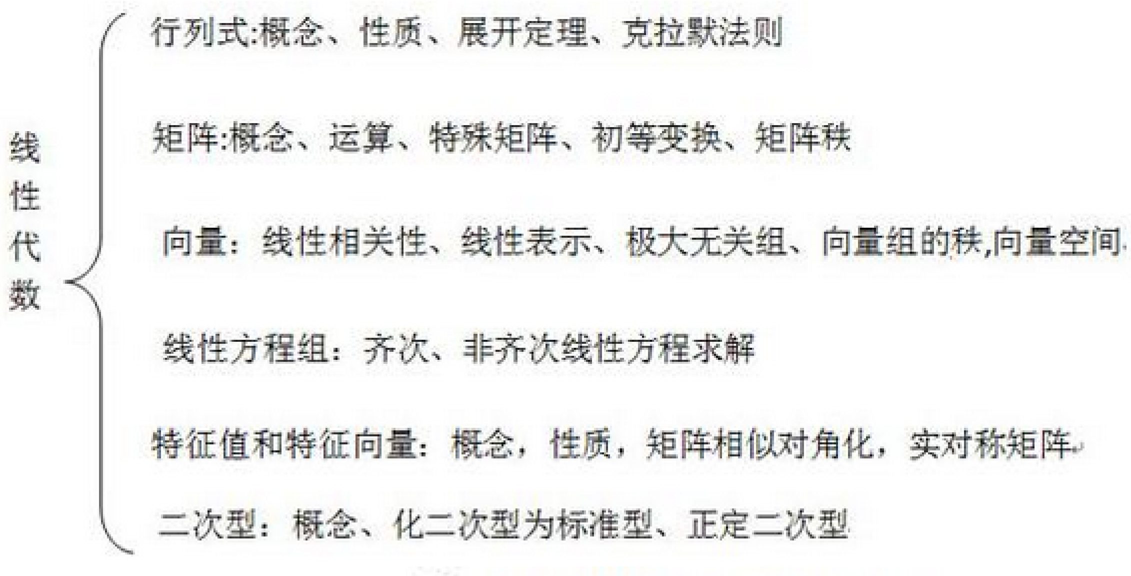
- 理解显著性假设检验的思想，掌握假设检验的步骤，了解假设检验可能的两类错误。
- 掌握一个正态总体和两个正态总体的均值和方差的假设检验。

结构框架图

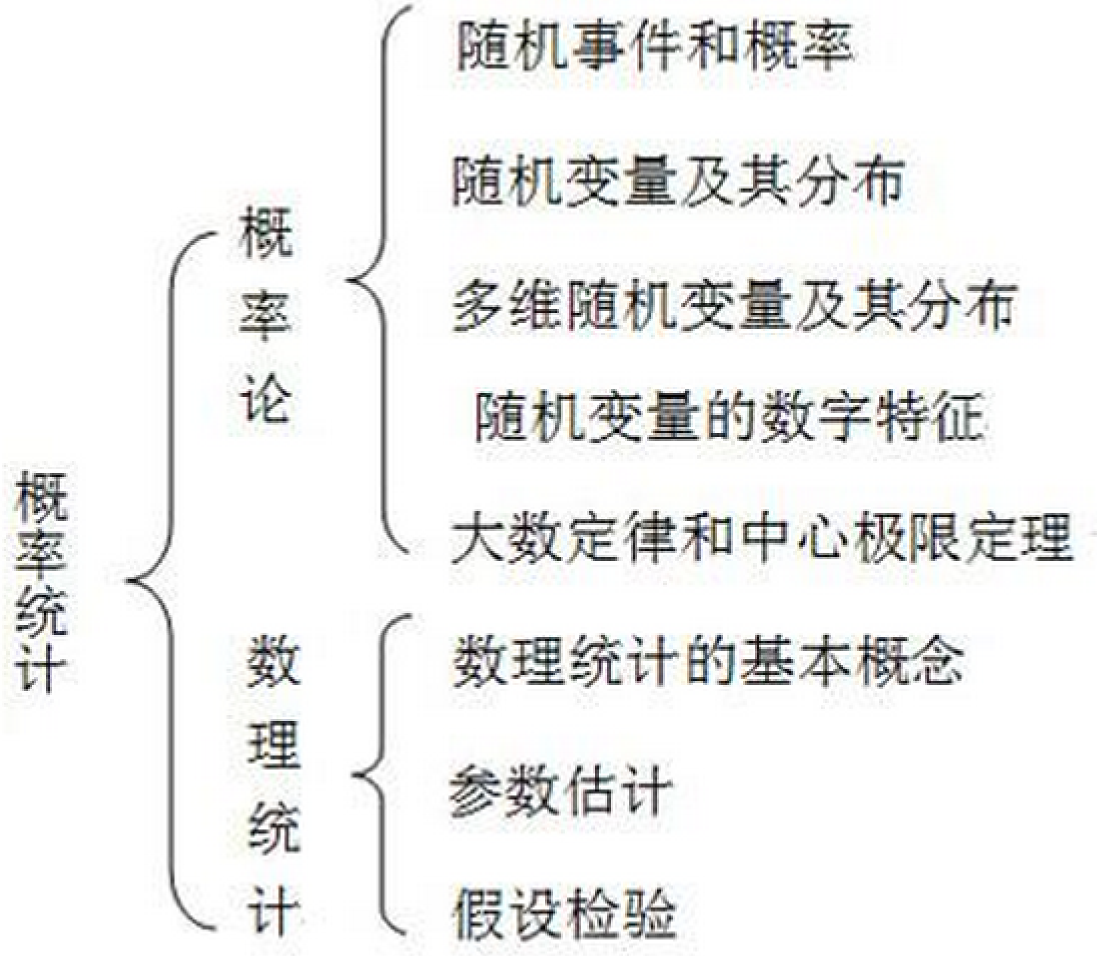
高数



线代



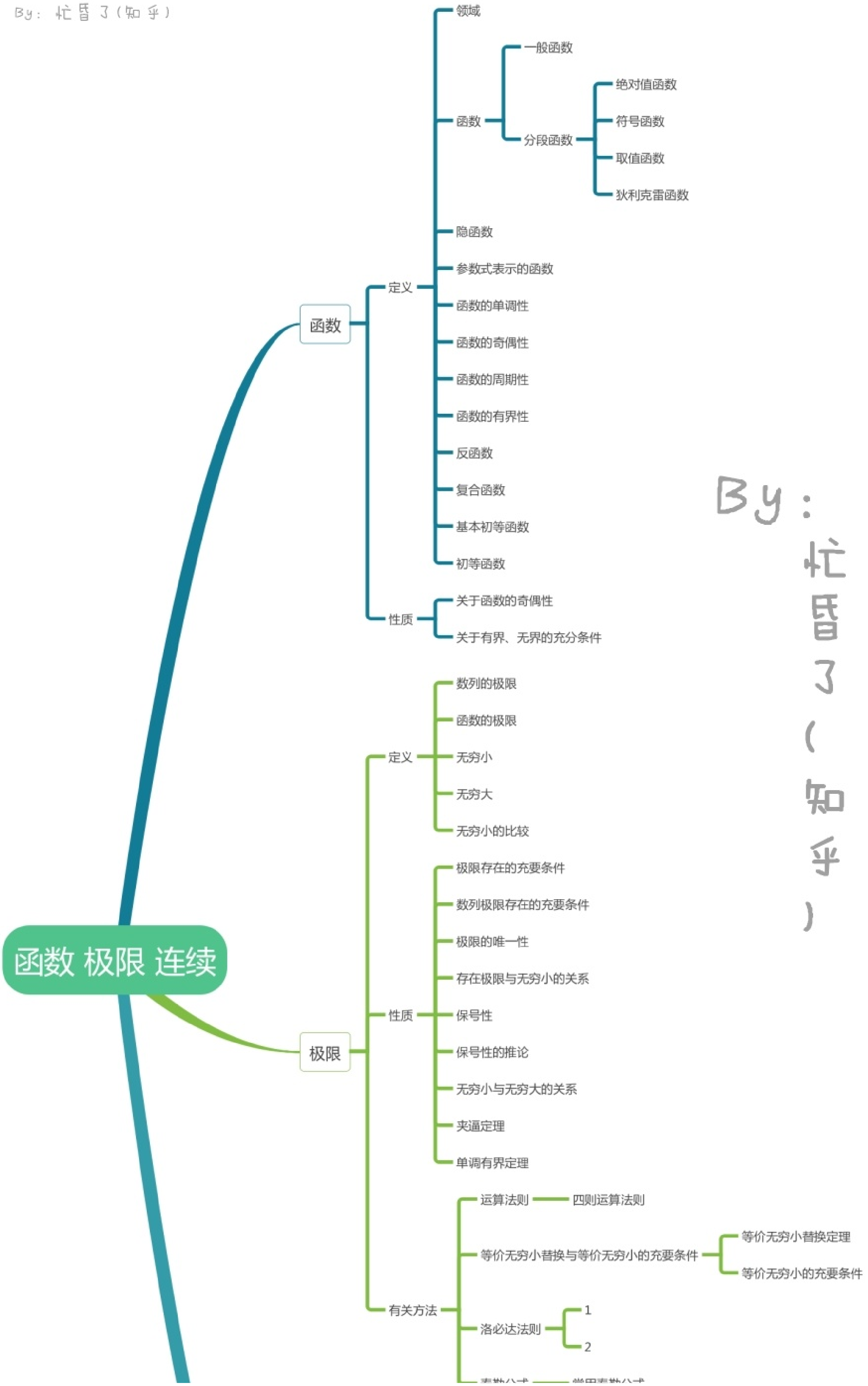
概率论与数理统计

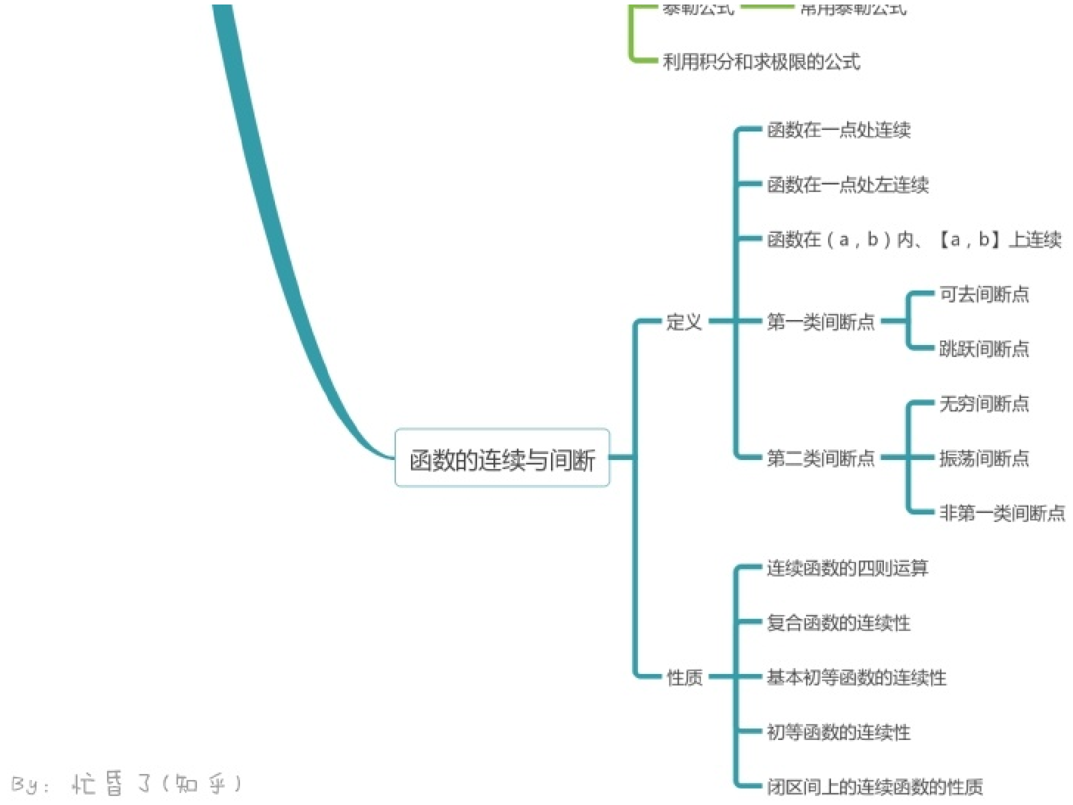

概率统计
概率论
随机事件和概率
随机变量及其分布
多维随机变量及其分布
随机变量的数字特征
大数定律和中心极限定理
数理统计
数理统计的基本概念
参数估计
假设检验

详情

函数极限与连续

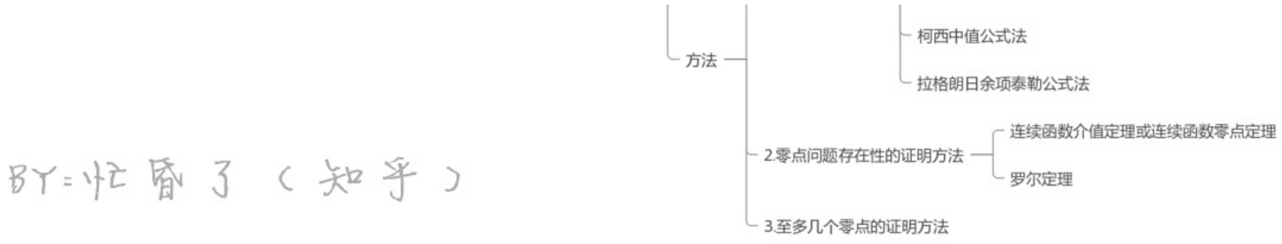
By: 忙昏了(知乎)


函数 极限 连续
函数
定义
领域
函数
一般函数
分段函数
绝对值函数
符号函数
取值函数
狄利克雷函数
隐函数
参数式表示的函数
函数的单调性
函数的奇偶性
函数的周期性
函数的有界性
反函数
复合函数
基本初等函数
初等函数
性质
关于函数的奇偶性
关于有界、无界的充分条件
极限
定义
数列的极限
函数的极限
无穷小
无穷大
无穷小的比较
性质
极限存在的充要条件
数列极限存在的充要条件
极限的唯一性
存在极限与无穷小的关系
保号性
保号性的推论
无穷小与无穷大的关系
夹逼定理
单调有界定理
有关方法
运算法则
四则运算法则
等价无穷小替换与等价无穷小的充要条件
等价无穷小替换定理
等价无穷小的充要条件
洛必达法则
1
2
By: 忙昏了(知乎)


利用积分和求极限的公式
函数的连续与间断
定义
函数在一点处连续
函数在一点处左连续
函数在（a，b）内、【a，b】上连续
第一类间断点
可去间断点
跳跃间断点
第二类间断点
无穷间断点
振荡间断点
非第一类间断点
性质
连续函数的四则运算
复合函数的连续性
基本初等函数的连续性
初等函数的连续性
闭区间上的连续函数的性质
By：忙昏了（知乎）

导数与微分

- 一元函数微分学
  - 导数与微分，导数的计算
    - 定义
      - 导数定义
      - 左右导数
      - 函数的微分
      - 高阶导数
    - 性质
      - 可导与连续的关系
      - 左右导数与可导的关系 —— 导数的几何意义
      - 可导与可微的关系
      - 函数的微分与函数的增量之间的关系
    - 公式
      - 常用的导数（微分）运算法则
      - 基本初等函数的导数（微分）公式
      - 变限积分求导公式
      - n阶导数运算法则
      - 几个常见的初等函数的n阶导数公式
      - 参数式所确定的函数的导数公式
      - 隐函数的求导法
      - 幂指函数的求导法则与公式
      - 反函数的一阶及二阶导数公式
  - 导数的应用——导数在研究函数性态方面的应用
    - 定义
      - 极值
      - 最值
      - 曲线的凹凸性
      - 曲线的拐点
      - 曲线的驻点
    - 性质
      - 1.极值与单调性的判定
        - 单调性的判定
        - 可导点处极值的必要条件
        - 极值的第一充分条件
        - 极值的第二充分条件
      - 2.凹凸性与拐点的判定
        - 凹凸性的判定
        - 二阶可导点处拐点的必要条件
        - 拐点的充分条件
      - 3.闭区间上连续函数的最大值最小值的求法
      - 4.应用问题的最值的求法
      - 5.渐近线的求法
        - 水平渐近线
        - 铅直渐近线
        - 斜渐近线
      - 曲率、曲率圆与曲率半径
  - 中值定理、不等式与零点问题
    - 定义
      - 费马定理
      - 罗尔定理
      - 拉格朗日中值定理
      - 柯西中值定理
      - 泰勒定理
    - 1.不等式的证明
      - 单调性
      - 最值法
      - 拉格朗日中值公式法


BY:忙昏了(知乎)
方法
柯西中值公式法
拉格朗日余项泰勒公式法
2.零点问题存在性的证明方法
连续函数介值定理或连续函数零点定理
罗尔定理
3.至多几个零点的证明方法

一元函数积分学

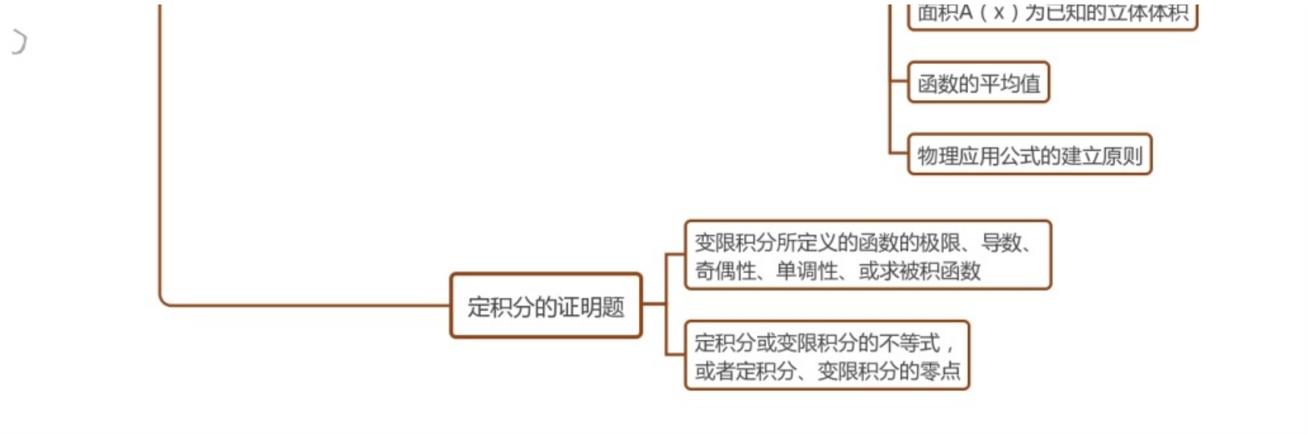
一元函数积分学

- 不定积分与定积分
  - 定义
    - 原函数与不定积分
    - 定积分
  - 性质
    - 定积分存在定理
    - 原函数存在定理
    - 不定积分与定积分的关系（变上限函数对上限变量求导）
    - 牛顿莱布尼兹定理
    - 不定积分的性质
    - 定积分的性质

BY：忙昏了（知乎）

- 不定积分与定积分的计算
  - 基本积分公式
  - 基本积分方法
    - 不定积分的凑微分求积分法（第一换元法）
    - 不定积分的换元积分法（第二换元法）
    - 常见的几种典型类型的换元法
    - 定积分的换元积分法
    - 不定积分与定积分的分部积分法
    - 常见的用分部积分的几种题型
    - 几个有用的定积分公式
- 反常积分及其计算
  - 定义
    - 无穷区间上的反常积分
    - 无界函数的反常积分
  - 性质
    - 两类反常积分的识别
    - 对称区间上奇偶函数的反常积分
    - 重要的反常积分
- 定积分的应用
  - 基本方法
  - 几何公式与物理应用
    - 平面图形面积
    - 平面曲线的弧长
    - 旋转体体积
    - 旋转曲面面积
    - 在区间【a，b】上平行截面的

BY：忙昏了（知乎）


面积A（x）为已知的立体体积
函数的平均值
物理应用公式的建立原则
定积分的证明题
变限积分所定义的函数的极限、导数、奇偶性、单调性、或求被积函数
定积分或变限积分的不等式，或者定积分、变限积分的零点

公式大全

高数

全国硕士研究生统一入学考试
数学公式大全
高等数学公式

导数公式：

$$(tgx)'=\sec^2 x$$
$$(ctgx)'=-\csc^2 x$$
$$(\sec x)'=\sec x\cdot tgx$$
$$(\csc x)'=-\csc x\cdot ctgx$$
$$(a^x)'=a^x\ln a$$
$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$$
$$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

基本积分表：

$$\int tgxdx=-\ln|\cos x|+C$$
$$\int ctgxdx=\ln|\sin x|+C$$
$$\int \sec xdx=\ln|\sec x+tgx|+C$$
$$\int \csc xdx=\ln|\csc x-ctgx|+C$$
$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$$
$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$
$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$$
$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\sec^2 xdx=tgx+C$$
$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\csc^2 xdx=-ctgx+C$$
$$\int\sec x\cdot tgxdx=\sec x+C$$
$$\int\csc x\cdot ctgxdx=-\csc x+C$$
$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$
$$\int shxdx=chx+C$$
$$\int chxdx=shx+C$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})+C$$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$
$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$
$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$
$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

三角函数的有理式积分：

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad u=tg\frac{x}{2},\quad dx=\frac{2du}{1+u^2}$$

一些初等函数：

$$双曲正弦:shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$双曲余弦:chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$双曲正切:thx=\frac{shx}{chx}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$arshx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$archx=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$arthx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e=2.718281828459045\ldots$$

三角函数公式：

·诱导公式：

函数 / 角A	sin	cos	tg	ctg
-α	-sinα	cosα	-tgα	-ctgα
90°-α	cosα	sinα	ctgα	tgα
90°+α	cosα	-sinα	-ctgα	-tgα
180°-α	sinα	-cosα	-tgα	-ctgα
180°+α	-sinα	-cosα	tgα	ctgα
270°-α	-cosα	-sinα	ctgα	tgα
270°+α	-cosα	sinα	-ctgα	-tgα
360°-α	-sinα	cosα	-tgα	-ctgα
360°+α	sinα	cosα	tgα	ctgα

·和差角公式：

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp 1}{ctg\beta\pm ctg\alpha}$$

·和差化积公式：

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

· 倍角公式：

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$tg 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$$

· 半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

· 正弦定理：$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ · 余弦定理：$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

· 反三角函数性质：$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \qquad arctgx = \frac{\pi}{2} - arcctgx$

高阶导数公式——莱布尼兹（Leibniz）公式：

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

中值定理与导数应用：

拉格朗日中值定理：$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

柯西中值定理：$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当$F(x) = x$时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

曲率：

弧微分公式：$ds = \sqrt{1+y'^2}dx$，其中$y' = tg\alpha$

平均曲率：$\bar{K} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$. $\Delta\alpha$：从M点到M′点，切线斜率的倾角变化量；Δs：$\overset{\frown}{MM'}$弧长。

M点的曲率：$K = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

直线：$K = 0$;

半径为a的圆：$K = \frac{1}{a}$.

定积分应用相关公式：

功：$W=F\cdot s$

水压力：$F=p\cdot A$

引力：$F=k\dfrac{m_1m_2}{r^2}$，k为引力系数

函数的平均值：$\bar{y}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

均方根：$\sqrt{\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt}$

空间解析几何和向量代数：

空间2点的距离：$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

向量在轴上的投影：$\Pr j_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi$，$\varphi$是$\overrightarrow{AB}$与$u$轴的夹角。

$\Pr j_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\Pr j\vec{a}_1+\Pr j\vec{a}_2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$，是一个数量，

两向量之间的夹角：$\cos\theta=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$，$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$。例：线速度：$\vec{v}=\vec{w}\times\vec{r}$。

向量的混合积：$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\alpha$，$\alpha$为锐角时，

代表平行六面体的体积。

平面的方程：

1、点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中$\vec{n}=\{A,B,C\},M_0(x_0,y_0,z_0)$

2、一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$

3、截距世方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线的方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$，其中$\vec{s}=\{m,n,p\}$；参数方程：$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$

二次曲面：

1、椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2、抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$，（$p,q$同号）

3、双曲面：

单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$（$a,b,c$ 均为正数）

双叶双曲面：$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$（$a,b,c$ 均为正数）

多元函数微分法及应用

全微分：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$　　$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

全微分的近似计算：$\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：

$z=f[u(t),v(t)]$　　$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$

$z=f[u(x,y),v(x,y)]$　　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

当$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$**时，**

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$　　$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式：

隐函数$F(x,y)=0$，　$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$，　$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{F_x}{F_y})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{F_x}{F_y})\cdot\frac{dy}{dx}$

隐函数$F(x,y,z)=0$，　$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组：$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ $\quad J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

微分法在几何上的应用：

空间曲线$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$**在点**$M(x_0,y_0,z_0)$**处的切线方程：**$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

在点M处的法平面方程： $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

若空间曲线方程为：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$**，则切向量**$\vec{T}=\left\{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}\right\}$

曲面$F(x,y,z)=0$上一点$M(x_0,y_0,z_0)$，则：

1、过此点的法向量： $\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$

2、过此点的切平面方程： $F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

3、过此点的法线方程： $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

方向导数与梯度：

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$沿任一方向l的方向导数为：$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$

其中φ为x轴到方向l的转角。

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$的梯度：$\operatorname{grad} f(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

它与方向导数的关系是：$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\operatorname{grad} f(x,y)\cdot\vec{e}$，其中$\vec{e}=\cos\varphi\cdot\vec{i}+\sin\varphi\cdot\vec{j}$，为$l$方向上的单位向量。

$\therefore\dfrac{\partial f}{\partial l}$是$\operatorname{grad} f(x,y)$在$l$上的投影。

多元函数的极值及其求法：

设$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，令：$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\quad f_{xy}(x_0,y_0)=B,\quad f_{yy}(x_0,y_0)=C$

$$\text{则:}\begin{cases} AC-B^2>0\text{时}, \begin{cases} A<0,(x_0,y_0)\text{为极大值} \\ A>0,(x_0,y_0)\text{为极小值} \end{cases} \\ AC-B^2<0\text{时}, \qquad \text{无极值} \\ AC-B^2=0\text{时}, \qquad \text{不确定} \end{cases}$$

重积分及其应用：

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$\text{曲面}z=f(x,y)\text{的面积}A=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$\text{平面薄片的重心：}\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma},\qquad \bar{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma}$$

$$\text{平面薄片的转动惯量：对于}x\text{轴}I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)d\sigma,\qquad \text{对于}y\text{轴}I_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)d\sigma$$

平面薄片（位于xoy平面）对z轴上质点$M(0,0,a),(a>0)$的引力：$F=\{F_x,F_y,F_z\}$，其中：

$$F_x=f\iint\limits_D \frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_y=f\iint\limits_D \frac{\rho(x,y)yd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_z=-fa\iint\limits_D \frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

柱面坐标和球面坐标：

$$\text{柱面坐标:}\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta, \\ z=z \end{cases}\qquad \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Omega F(r,\theta,z)rdrd\theta dz,$$

其中：$F(r,\theta,z)=f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)$

$$\text{球面坐标:}\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi \end{cases}\qquad dv=rd\varphi\cdot r\sin\varphi\cdot d\theta\cdot dr=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Omega F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{r(\varphi,\theta)}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi dr$$

$$\text{重心：}\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega x\rho dv,\qquad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega y\rho dv,\qquad \bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega z\rho dv,\qquad \text{其中}M=\bar{x}=\iiint\limits_\Omega \rho dv$$

$$\text{转动惯量：}I_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\rho dv,\qquad I_y=\iiint\limits_\Omega (x^2+z^2)\rho dv,\qquad I_z=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\rho dv$$

曲线积分：

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：

设$f(x,y)$在L上连续，L的参数方程为：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$,则：

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad (\alpha<\beta) \qquad \text{特殊情况：}\begin{cases} x=t \\ y=\varphi(t) \end{cases}$$

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

设L的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，则：

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

两类曲线积分之间的关系：$\int_L Pdx+Qdy = \int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$，其中$\alpha$和$\beta$分别为$L$上对应点处切向量的方向角。

格林公式：$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx+Qdy$格林公式：$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx+Qdy$

当$P=-y, Q=x$，即：$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$时，得到$D$的面积：$A=\iint_D dxdy = \frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

·平面上曲线积分与路径无关的条件：

1、G是一个单连通区域；

2、$P(x,y)$，$Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数，且$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$。注意奇点，如$(0,0)$，应减去对此奇点的积分，注意方向相反！

·二元函数的全微分求积：

在$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$时，$Pdx+Qdy$才是二元函数$u(x,y)$的全微分，其中：

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，通常设$x_0=y_0=0$。

曲面积分：

对面积的曲面积分：$\iint_\Sigma f(x,y,z)ds = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$

对坐标的曲面积分：$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$，**其中：**

$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$，**取曲面的上侧时取正号；**

$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz = \pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$，**取曲面的前侧时取正号；**

$\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$，**取曲面的右侧时取正号。**

两类曲面积分之间的关系：$\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \iint_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$

高斯公式：

$$\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

高斯公式的物理意义 — —通量与散度：

散度：$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$,即：单位体积内所产生 的流体质量，若$\operatorname{div}\vec{v}<0$,则为流出...

通量：$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}dS=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS,$

因此，高斯公式又可写成：$\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}dv=\oiint_{\Sigma}A_n dS$

斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系：

$$\iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$

上式左端又可写成：$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

空间曲线积分与路径无关的条件：$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

旋度：$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

向量场$\vec{A}$沿有向闭曲线Γ的环流量：$\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{t}ds$

常数项级数：

等比数列：$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$

等差数列：$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}$

调和级数：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$**是发散的**

级数审敛法：

1、正项级数的审敛法——根植审敛法（柯西判别法）：

设：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$，则$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\\rho>1\text{时，级数发散}\\\rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

2、比值审敛法：

设：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$，则$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\\rho>1\text{时，级数发散}\\\rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

3、定义法：

$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n;\lim\limits_{n\to\infty}s_n$存在，则收敛；否则发散。

交错级数$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$(或$-u_1+u_2-u_3+\cdots,u_n>0$)的审敛法——莱布尼兹定理：

如果交错级数满足$\begin{cases}u_n\ge u_{n+1}\\\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0\end{cases}$，那么级数收敛且其和$s\le u_1$,其余项$r_n$的绝对值$|r_n|\le u_{n+1}$。

绝对收敛与条件收敛：

(1)$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，其中$u_n$为任意实数；

(2)$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots$

如果(2)收敛，则(1)肯定收敛，且称为绝对收敛级数；

如果(2)发散，而(1)收敛，则称(1)为条件收敛级数。

调和级数：$\sum\dfrac{1}{n}$发散，而$\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛；

级数：$\sum\dfrac{1}{n^2}$收敛；

p级数：$\sum\dfrac{1}{n^p}$ $\begin{cases}p\le1\text{ 时发散}\\p>1\text{时收敛}\end{cases}$

幂级数：

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots\quad\begin{cases}|x|<1\text{时，收敛于}\dfrac{1}{1-x}\\|x|\ge1\text{时，发散}\end{cases}$$

对于级数(3)$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，如果它不是仅在原点收敛，也不是在全数轴上都收敛，则必存在R，使$\begin{cases}|x|<R\text{时收敛}\\|x|>R\text{时发散}\\|x|=R\text{时不定}\end{cases}$，其中$R$称为收敛半径。

求收敛半径的方法：设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中$a_n$，$a_{n+1}$是(3)的系数，则$\begin{cases}\rho\ne0\text{时，}R=\dfrac{1}{\rho}\\\rho=0\text{时，}R=+\infty\\\rho=+\infty\text{时，}R=0\end{cases}$

函数展开成幂级数：

函数展开成泰勒级数：$f(x)=f(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$

余项：$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$f(x)$可以展开成泰勒级数的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$

$x_0=0$时即为麦克劳林公式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

一些函数展开成幂级数：

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

三角级数：

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中，$a_0=aA_0$，$a_n=A_n\sin\varphi_n$，$b_n=A_n\cos\varphi_n$，$\omega t=x$。

正交性：$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x\cdots\sin nx,\cos nx\cdots$任意两个不同项的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分＝0。

傅立叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)，\text{周期}=2\pi$$

$$\text{其中}\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx & (n=0,1,2\cdots)\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx & (n=1,2,3\cdots)\end{cases}$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8} \qquad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\text{（相加）}$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{24} \qquad 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}\text{（相减）}$$

正弦级数：$a_n=0$，$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad n=1,2,3\cdots \quad f(x)=\sum b_n\sin nx$**是奇函数**

余弦级数：$b_n=0$，$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad n=0,1,2\cdots \quad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx$**是偶函数**

周期为$2l$的周期函数的傅立叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})，\text{周期}=2l$$

$$\text{其中}\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx & (n=0,1,2\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx & (n=1,2,3\cdots)\end{cases}$$

微分方程的相关概念：

一阶微分方程：$y'=f(x,y)$ 或 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

可分离变量的微分方程：一阶微分方程可以化为$g(y)dy=f(x)dx$的形式，解法：

$\int g(y)dy=\int f(x)dx$ 得：$G(y)=F(x)+C$称为隐式通解。

齐次方程：一阶微分方程可以写成$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)=\varphi(x,y)$，即写成$\dfrac{y}{x}$的函数，解法：

设$u=\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，$u+\dfrac{du}{dx}=\varphi(u),\therefore\dfrac{dx}{x}=\dfrac{du}{\varphi(u)-u}$分离变量，积分后将$\dfrac{y}{x}$代替$u$，

即得齐次方程通解。

一阶线性微分方程：

1、一阶线性微分方程：$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

$$\begin{cases}\text{当}Q(x)=0\text{时,为齐次方程，}y=Ce^{-\int P(x)dx}\\ \text{当}Q(x)\neq0\text{时，为非齐次方程，}y=(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)e^{-\int P(x)dx}\end{cases}$$

2、贝努力方程：$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n,(n\neq0,1)$

全微分方程：

如果$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$中左端是某函数的全微分方程，即：

$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，其中：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$

$\therefore u(x,y)=C$应该是该全微分方程的通解。

二阶微分方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x),\begin{cases}f(x)\equiv0\text{时为齐次}\\ f(x)\neq0\text{时为非齐次}\end{cases}$$

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法：

$(*)y''+py'+qy=0$，其中p,q为常数；

求解步骤：

1、写出特征方程：$(\Delta)r^2+pr+q=0$，其中r^2，r的系数及常数项恰好是$(*)$式中y'',y',y的系数；

2、求出(Δ)式的两个根r_1,r_2

3、根据r_1,r_2的不同情况，按下表写出(*)式的通解：

r_1，r_2的形式	(*)式的通解
两个不相等实根$(p^2-4q>0)$	$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$
两个相等实根$(p^2-4q=0)$	$y=(c_1+c_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根$(p^2-4q<0)$ $r_1=\alpha+i\beta$，$r_2=\alpha-i\beta$ $\alpha=-\frac{p}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$	$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=f(x)$，p,q为常数

$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型，λ为常数；

$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

线代

线性代数部分

1、行列式

1. n 阶行列式共有 n^2 个元素，展开后有 $n!$ 项；
2. 代数余子式的性质：
   ①、A_{ij} 和 a_{ij} 的大小无关；
   ②、某行（列）的元素乘以其它行（列）元素的代数余子式为 0；
   ③、某行（列）的元素乘以该行（列）元素的代数余子式为 $|A|$；
3. 代数余子式和余子式的关系：$M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$　　　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$
4. 设 n 行列式 D：
   将 D 上、下翻转或左右翻转，所得行列式为 D_1，则 $D_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$；
   将 D 顺时针或逆时针旋转 90°，所得行列式为 D_2，则 $D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$；
   将 D 主对角线翻转后（转置），所得行列式为 D_3，则 $D_3=D$；
   将 D 主副角线翻转后，所得行列式为 D_4，则 $D_4=D$；
5. 行列式的重要公式：
   ①、主对角行列式：主对角元素的乘积；
   ②、副对角行列式：副对角元素的乘积 $\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；
   ③、上、下三角行列式（|◥|=|◣|）：主对角元素的乘积；
   ④、|◤|和|◢|：副对角元素的乘积 $\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；
   ⑤、拉普拉斯展开式：$\begin{vmatrix}A & O\\ C & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & C\\ O & B\end{vmatrix}=|A||B|$、$\begin{vmatrix}C & A\\ B & O\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}O & A\\ B & C\end{vmatrix}=(-1)^{m\cdot n}|A||B|$
   ⑥、范德蒙行列式：大指标减小指标的连乘积；
   ⑦、特征值；
6. 对于 n 阶行列式 $|A|$，恒有：$|\lambda E-A|=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k S_k\lambda^{n-k}$；
7. 证明 $|A|=0$ 的方法：
   ①、$|A|=-|A|$；
   ②、反证法；
   ③、构造齐次方程组 $Ax=0$，证明其有非零解；
   ④、利用秩，证明 $r(A)<n$；
   ⑤、证明 0 是其特征值；

2、矩阵

1. A 是 n 阶可逆矩阵：

$\Leftrightarrow |A| \neq 0$（是非奇异矩阵）；

$\Leftrightarrow r(A) = n$ （是满秩矩阵）

$\Leftrightarrow A$ 的行（列）向量组线性无关；

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $Ax = 0$ 有唯一零解

$\Leftrightarrow \forall b \in R^n$， $Ax = b$ 总有唯一解；

$\Leftrightarrow A$ 与 E 等价；

$\Leftrightarrow A$ 可表示成若干个初等矩阵的乘积；

$\Leftrightarrow A$ 的特征值全不为 0；

$\Leftrightarrow A^T A$ 是正定矩阵；

$\Leftrightarrow A$ 的行（列）向量组是 R^n 的一组基；

$\Leftrightarrow A$ 是 R^n 中某两组基的过渡矩阵；

2. 对于 n 阶矩阵 A： $AA^* = A^*A = |A|E$ **无条件恒**成立；

3. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ $\qquad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ $\qquad (A^*)^T = (A^T)^*$

   $(AB)^T = B^T A^T$ $\qquad (AB)^* = B^* A^*$ $\qquad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

4. 矩阵是表格，推导符号为波浪号或箭头；行列式是数值，可求代数和；
5. 关于分块矩阵的重要结论，其中均 A、B 可逆：

若 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，则：

Ⅰ、$|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$；

Ⅱ、$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$；

②、$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$； （主对角分块）

③、$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$； （副对角分块）

④、$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$； （拉普拉斯）

⑤、$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$； （拉普拉斯）

3、矩阵的初等变换与线性方程组

1. 一个 $m \times n$ 矩阵 A，总可经过初等变换化为标准形，其标准形是唯一确定的： $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$；

等价类：所有与 A 等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类；标准形为其形状最简单的矩阵；

对于同型矩阵 A、B，若 $r(A)=r(B) \Leftrightarrow A \sim B$；

2. 行最简形矩阵：

①、只能通过初等行变换获得；

②、每行首个非 0 元素必须为 1；

③、每行首个非 0 元素所在列的其他元素必须为 0；

3. 初等行变换的应用：（初等列变换类似，或转置后采用初等行变换）

①、若 $(A,E)\overset{r}{\sim}(E,X)$，则 A 可逆，且 $X=A^{-1}$；

②、对矩阵 (A,B) 做初等行变化，当 A 变为 E 时，B 就变成 $A^{-1}B$，即：$(A,B)\overset{c}{\sim}(E,A^{-1}B)$；

③、求解线形方程组：对于 n 个未知数 n 个方程 $Ax=b$，如果 $(A,b)\overset{r}{\sim}(E,x)$，则 A 可逆，且 $x=A^{-1}b$；

4. 初等矩阵和对角矩阵的概念：

①、初等矩阵是行变换还是列变换，由其位置决定：左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵；

②、$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，左乘矩阵 A，λ_i 乘 A 的各行元素；右乘，λ_i 乘 A 的各列元素；

③、对调两行或两列，符号 $E(i,j)$，且 $E(i,j)^{-1}=E(i,j)$，例如：$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{pmatrix}$；

④、倍乘某行或某列，符号 $E(i(k))$，且 $E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$，例如：$\begin{pmatrix}1 & & \\ & k & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \frac{1}{k} & \\ & & 1\end{pmatrix}(k\neq 0)$；

⑤、倍加某行或某列，符号 $E(ij(k))$，且 $E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$，如：$\begin{pmatrix}1 & & k\\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & -k\\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}(k\neq 0)$；

5. 矩阵秩的基本性质：

①、$0\le r(A_{m\times n})\le \min(m,n)$；

②、$r(A^T)=r(A)$；

③、若 $A\sim B$，则 $r(A)=r(B)$；

④、若 P、Q 可逆，则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$；**（可逆矩阵不影响矩阵的秩）**

⑤、$\max(r(A),r(B))\le r(A,B)\le r(A)+r(B)$；（※）

⑥、$r(A+B)\le r(A)+r(B)$；（※）

⑦、$r(AB)\le \min(r(A),r(B))$；（※）

⑧、如果 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，且 $AB=0$，则：（※）

Ⅰ、B 的**列**向量全部是齐次方程组 $AX=0$ 解（转置运算后的结论）；

Ⅱ、$r(A)+r(B)\le n$

⑨、若 A、B 均为 n 阶方阵，则 $r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$；

6. 三种特殊矩阵的方幂：

①、秩为 1 的矩阵：一定可以分解为**列矩阵（向量）× 行矩阵（向量）**的形式，再采用结合律；

②、型如$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$的矩阵：利用二项展开式；

二项展开式：$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}$；

注：Ⅰ、$(a+b)^n$ 展开后有 $n+1$ 项；

Ⅱ、$C_n^m = \dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ $\quad C_n^0 = C_n^n = 1$

Ⅲ、组合的性质：$C_n^m = C_n^{n-m}$ $\quad C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ $\quad \sum_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$ $\quad rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1}$；

③、利用特征值和相似对角化；

7. 伴随矩阵：

①、伴随矩阵的秩：$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$；

②、伴随矩阵的特征值：$\dfrac{|A|}{\lambda}$ $(AX = \lambda X, A^* = |A| A^{-1} \Rightarrow A^* X = \dfrac{|A|}{\lambda} X)$；

③、$A^* = |A| A^{-1}$、$|A^*| = |A|^{n-1}$

8. 关于 A 矩阵秩的描述：

①、$r(A) = n$，A 中有 n 阶子式不为 0，$n+1$ 阶子式全部为 0；（两句话）

②、$r(A) < n$，A 中有 n 阶子式全部为 0；

③、$r(A) \geq n$，A 中有 n 阶子式不为 0；

9. 线性方程组：$Ax = b$，其中 A 为 $m \times n$ 矩阵，则：

①、m 与方程的个数相同，即方程组 $Ax = b$ 有 m 个方程；

②、n 与方程组得未知数个数相同，方程组 $Ax = b$ 为 n 元方程；

10. 线性方程组 $Ax = b$ 的求解：

①、对增广矩阵 B 进行初等行变换（**只能使用初等行变换**）；

②、齐次解为对应齐次方程组的解；

③、特解：自由变量赋初值后求得；

11. 由 n 个未知数 m 个方程的方程组构成 n 元线性方程：

①、$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n = b_n \end{cases}$；

②、$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax = b$（向量方程，$A$ 为 $m \times n$ 矩阵，m 个方程，n 个未知数）

③、$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta$（全部按列分块，其中$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$）；

④、$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \beta$（线性表出）

⑤、有解的充要条件：$r(A) = r(A, \beta) \le n$（n为未知数的个数或维数）

4、向量组的线性相关性

1. m个n维列向量所组成的向量组A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$构成$n \times m$矩阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$；

   m个n维行向量所组成的向量组B：$\beta_1^T, \beta_2^T, \cdots, \beta_m^T$构成$m \times n$矩阵$B = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$；

   含有有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应；

2. ①、向量组的线性相关、无关 $\Leftrightarrow Ax = 0$有、无非零解；（齐次线性方程组）
   ②、向量的线性表出 $\Leftrightarrow Ax = b$是否有解；（线性方程组）
   ③、向量组的相互线性表示 $\Leftrightarrow AX = B$是否有解；（矩阵方程）

3. 矩阵$A_{m \times n}$与$B_{l \times n}$行向量组等价的充分必要条件是：齐次方程组$Ax = 0$和$Bx = 0$同解；(P_{101}例 14)

4. $r(A^TA) = r(A)$；(P_{101}例 15)

5. n维向量线性相关的几何意义：
   ①、α线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0$；
   ②、α, β线性相关 $\Leftrightarrow \alpha, \beta$坐标成比例或共线（平行）；
   ③、α, β, γ线性相关 $\Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$共面；

6. 线性相关与无关的两套定理：
   若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$必线性相关；
   若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s-1}$必线性无关；（向量的个数加加减减，二者为对偶）
   若r维向量组A的每个向量上添上$n-r$个分量，构成n维向量组B：
   若A线性无关，则B也线性无关；反之若B线性相关，则A也线性相关；（向量组的维数加加减减）
   简言之：无关组延长后仍无关，反之，不确定；

7. 向量组A（个数为r）能由向量组B（个数为s）线性表示，且A线性无关，则$r \le s$(二版P_{74}**定理 7**);

   向量组A能由向量组B线性表示，则$r(A) \le r(B)$；（P_{86}**定理 3**）

   向量组A能由向量组B线性表示
   $\Leftrightarrow AX = B$有解；

   $\Leftrightarrow r(A) = r(A, B)$（$P_{85}$**定理 2**）

   向量组A能由向量组B等价$\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r(A, B)$（$P_{85}$**定理 2 推论**）

8. 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使 $A=P_1P_2\cdots P_l$；

①、矩阵行等价：$A\overset{r}{\sim}B\Leftrightarrow PA=B$（左乘，$P$ 可逆）$\Leftrightarrow Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

②、矩阵列等价：$A\overset{c}{\sim}B\Leftrightarrow AQ=B$（右乘，$Q$ 可逆）；

③、矩阵等价：$A\sim B\Leftrightarrow PAQ=B$（$P$、$Q$ 可逆）；

9. 对于矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$：

①、若 A 与 B 行等价，则 A 与 B 的行秩相等；

②、若 A 与 B 行等价，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，且 A 与 B 的任何对应的列向量组具有相同的线性相关性；

③、矩阵的初等变换不改变矩阵的秩；

④、矩阵 A 的行秩等于列秩；

10. 若 $A_{m\times s}B_{s\times n}=C_{m\times n}$，则：

①、C 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示，B 为系数矩阵；

②、C 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示，A^T 为系数矩阵；（转置）

11. 齐次方程组 $Bx=0$ 的解一定是 $ABx=0$ 的解，**考试中可以直接作为定理使用，而无需证明**；

①、$ABx=0$ 只有零解 $\Rightarrow Bx=0$ 只有零解；

②、$Bx=0$ 有非零解 $\Rightarrow ABx=0$ 一定存在非零解；

12. 设向量组 $B_{n\times r}:b_1,b_2,\cdots,b_r$ 可由向量组 $A_{n\times s}:a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性表示为：（P_{110} **题 19 结论**）

$$(b_1,b_2,\cdots,b_r)=(a_1,a_2,\cdots,a_s)K \quad (B=AK)$$

其中 K 为 $s\times r$，且 A 线性无关，则 B 组线性无关 $\Leftrightarrow r(K)=r$；（**B 与 K 的列向量组具有相同线性相关性**）

（必要性：$\because r=r(B)=r(AK)\le r(K),r(K)\le r,\therefore r(K)=r$；充分性：反证法）

注：当 $r=s$ 时，K 为方阵，可当作定理使用；

13. ①、对矩阵 $A_{m\times n}$，存在 $Q_{n\times m}$，$AQ=E_m$ $\Leftrightarrow r(A)=m$、Q 的列向量线性无关；（P_{87}）

②、对矩阵 $A_{m\times n}$，存在 $P_{n\times m}$，$PA=E_n$ $\Leftrightarrow r(A)=n$、P 的行向量线性无关；

14. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 成立；（定义）

$\Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$ 有非零解，即 $Ax=0$ 有非零解；

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$，系数矩阵的秩小于未知数的个数；

15. 设 $m\times n$ 的矩阵 A 的秩为 r，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩为：$r(S)=n-r$；

16. 若 η^* 为 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；（P_{111} **题 33 结论**）

5、相似矩阵和二次型

1. 正交矩阵 $\Leftrightarrow A^TA=E$ 或 $A^{-1}=A^T$（定义），性质：

①、A的列向量都是单位向量，且两两正交，即$a_i^T a_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} (i,j=1,2,\cdots n)$；

②、若A为正交矩阵，则$A^{-1}=A^T$也为正交阵，且$|A|=\pm1$；

③、若A、B正交阵，则AB也是正交阵；

注意：求解正交阵，千万不要忘记**施密特正交化**和**单位化**；

2. 施密特正交化：$(a_1,a_2,\cdots,a_r)$

   $b_1=a_1$；

   $b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1$

   ………

   $b_r=a_r-\frac{[b_1,a_r]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_r]}{[b_2,b_2]}b_2-\cdots-\frac{[b_{r-1},a_r]}{[b_{r-1},b_{r-1}]}b_{r-1}$；

3. 对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；

   对于**实对称阵**，不同特征值对应的特征向量正交；

4. ①、A与B等价 $\Leftrightarrow$ A经过初等变换得到B；

   $\Leftrightarrow PAQ=B$，P、Q可逆；

   $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$，$A$、$B$同型；

   ②、A与B合同 $\Leftrightarrow C^TAC=B$，其中可逆；

   $\Leftrightarrow x^TAx$与x^TBx有相同的正、负惯性指数；

   ③、A与B相似 $\Leftrightarrow P^{-1}AP=B$；

5. 相似一定合同、合同未必相似；

   若C为正交矩阵，则$C^TAC=B \Rightarrow A\sim B$，（合同、相似的约束条件不同，相似的更严格）；

6. A为对称阵，则A为二次型矩阵；

7. n元二次型x^TAx为正定：

   $\Leftrightarrow A$的正惯性指数为n；

   $\Leftrightarrow A$与E合同，即存在可逆矩阵C，使$C^TAC=E$；

   $\Leftrightarrow A$的所有特征值均为正数；

   $\Leftrightarrow A$的各阶顺序主子式均大于0；

   $\Rightarrow a_{ii}>0,|A|>0$；**(必要条件)**

概率论与数理统计

概率论与数理统计部分

1．随机事件及其概率

吸收律：

$$A\cup\Omega=\Omega \qquad A\cap\Omega=A$$

$$A\cup\varnothing=A \qquad A\cap\varnothing=\varnothing$$

$$A\cup(AB)=A \qquad A\cap(A\cup B)=A$$

$$A-B=A\overline{B}=A-(AB)$$

反演律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$ $\qquad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

2．概率的定义及其计算

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

若 $A\subset B$ $\quad\Rightarrow\quad P(B-A)=P(B)-P(A)$

对任意两个事件 A,B，有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$

加法公式：对任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

3．条件概率

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)\quad (P(A)>0)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$
$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$$

全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A\mid B_i)$$

Bayes 公式

概率论与数理统计部分

1．随机事件及其概率

吸收律：
$$A\cup\Omega=\Omega \qquad A\cap\Omega=A$$
$$A\cup\varnothing=A \qquad A\cap\varnothing=\varnothing$$
$$A\cup(AB)=A \qquad A\cap(A\cup B)=A$$

$$A-B=A\overline{B}=A-(AB)$$

反演律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B} \qquad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

2．概率的定义及其计算

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

若 $A\subset B \quad\Rightarrow\quad P(B-A)=P(B)-P(A)$

对任意两个事件 A,B，有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$

加法公式：对任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

3．条件概率

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)\quad(P(A)>0)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$
$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$$

全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A\mid B_i)$$

Bayes 公式

$$P(B_k|A)=\frac{P(AB_k)}{P(A)}=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

4．随机变量及其分布

分布函数计算

$$\begin{aligned}P(a<X\le b)&=P(X\le b)-P(X\le a)\\&=F(b)-F(a)\end{aligned}$$

5．离散型随机变量

(1) 0－1 分布

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k},\quad k=0,1$$

(2) 二项分布 $B(n,p)$

若 $P(A)=p$

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$$

* Possion 定理

$$\lim_{n\to\infty}np_n=\lambda>0$$

有 $$\lim_{n\to\infty}C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$
$$k=0,1,2,\cdots$$

(3) Poisson 分布 $P(\lambda)$

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots$$

6．连续型随机变量

(1) 均匀分布 $U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & \mathrm{b}\le x\end{cases}$$

(2) 指数分布 $E(\lambda)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad \lambda>0$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases}\quad \lambda>0$$

(3) 正态分布 $N(\mu, \sigma 2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty<x<+\infty$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$

* $N(0,1)$ — 标准正态分布

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad -\infty<x<+\infty$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\quad -\infty<x<+\infty$$

7.多维随机变量及其分布

二维随机变量(X,Y)的分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu\quad -\infty<x,y<+\infty$$

边缘分布函数与边缘密度函数

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dvdu$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,v)dv$$

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dudv$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,y)du$$

8. 连续型二维随机变量

(1) 区域 G 上的均匀分布，$U(G)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 二维正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

9. 二维随机变量的 条件分布

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)\qquad f_X(x)>0$$

$$=f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)\qquad f_Y(y)>0$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)}$$

10. 随机变量的数字特征

数学期望

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}x_kp_k$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

随机变量函数的数学期望

X 的 k 阶原点矩 $E(X^k)$

X 的 k 阶绝对原点矩 $E(|X|^k)$

X 的 k 阶中心矩 $E((X-E(X))^k)$

X 的 方差 $E((X-E(X))^2)=D(X)$

X,Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩 $E(X^kY^l)$

X,Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩

$$E\left((X-E(X))^k(Y-E(Y))^l\right)$$

X,Y 的 二阶混合原点矩 $E(XY)$

X,Y 的二阶混合中心矩　X,Y 的协方差

$$E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$$

X,Y 的相关系数

$$\rho_{XY}=\frac{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

X 的方差

$$D(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2$$

协方差

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y)&=E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)\\&=E(XY)-E(X)E(Y)\\&=\pm\frac{1}{2}\big(D(X\pm Y)-D(X)-D(Y)\big)\end{aligned}$$

相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

复习全书

高数

函数 极限 连续

- [ ] 函数
  - [ ] 定义
  - [ ] 性质
  - [ ] 定理
  - [ ] 公式
  - [ ] 题型
    - [ ] 分段函数的复合函数
    - [ ] 函数有界性讨论
- [ ] 极限

    - [ ] 定义
    - [ ] 性质
    - [ ] 定理
    - [ ] 公式
    - [ ] 题型
        - [ ] 求函数极限
        - [ ] 已知极限值求参数
        - [ ] 已知极限求相关极限
        - [ ] 特殊极限
        - [ ] 无穷小比较
        - [ ] 数列极限
        - [ ] 极限运算定理运用
- [ ] 连续
    - [ ] 定义
    - [ ] 性质
    - [ ] 定理
    - [ ] 公式
    - [ ] 题型
        - [ ] 判断连续/间断
        - [ ] 已知连续求参数
        - [ ] 连续函数零点

一元函数微分学

- [ ] 导数与微分
    - [ ] 定义
    - [ ] 性质
    - [ ] 定理
    - [ ] 公式
    - [ ] 题型
        - [ ] 按定义求一点的导数
        - [ ] 已知在某点可导，求参数，求相关极限
        - [ ] 已知极限，求某点的导数
        - [ ] 绝对值函数的导数
        - [ ] 由极限表达式确定可导性
        - [ ] 导数与微分、增量关系
        - [ ] 直接题型导数
- [ ] 导数的应用
    - [ ] 定义
    - [ ] 性质

    - [ ] 定理
    - [ ] 公式
    - [ ] 题型
        - [ ] 增减性、极值、凹凸性、拐点
        - [ ] 渐进线
        - [ ] 曲率与曲率圆
        - [ ] 最大值最小值
        - [ ] 值域，反函数及其定义域
- [ ] 中值定理、不等式与零点
    - [ ] 定理
    - [ ] 方法
    - [ ] 题型
        - [ ] 不等式证明
        - [ ] 原函数零点与导数零点
        - [ ] 复合函数零点
        - [ ] 双中值
        - [ ] 零点个数
        - [ ] 证明某点存在
        - [ ] 利用中值定理求极限

一元函数积分学

- [ ] 不定积分与定积分
    - [ ] 定义
    - [ ] 性质
    - [ ] 定理
    - [ ] 公式
    - [ ] 题型
        - [ ] 分段函数不定积分与定积分
        - [ ] 定积分与原函数存在性
        - [ ] 奇偶函数、周期函数原函数与变限函数
- [ ] 不定积分与定积分计算
    - [ ] 积分公式
    - [ ] 积分方法
    - [ ] 题型
        - [ ] 简单有理分式
        - [ ] 三角函数有理分式
        - [ ] 简单无理式
        - [ ] 两种不同类型的函数相乘
        - [ ] 被积函数中含有导数或变限函数

        - [ ] 对称区间、周期函数
        - [ ] 含参变量带绝对值
        - [ ] 杂例
- [ ] 反常积分及其计算
    - [ ] 定义
    - [ ] 性质
    - [ ] 定理
    - [ ] 公式
    - [ ] 题型
        - [ ] 计算及收敛性
        - [ ] 奇偶函数的反常积分
- [ ] 定积分应用
    - [ ] 基本方法
    - [ ] 几何公式与物理应用
    - [ ] 题型
        - [ ] 几何应用
        - [ ] 物理应用
- [ ] 定积分证明
    - [ ] 题型
        - [ ] 变限积分奇偶性、周期性、极值、单调性
        - [ ] 积分定义函数求极限
        - [ ] 不等式证明
        - [ ] 零点问题

向量代数与空间几何

- [ ] 向量代数
    - [ ] 向量概念
    - [ ] 向量运算
    - [ ] 向量性质
    - [ ] 题型
        - [ ] 运算
        - [ ] 运算应用及位置关系
- [ ] 平面与直线
    - [ ] 平面方程
    - [ ] 直线方程
    - [ ] 平面与直线的位置关系
    - [ ] 题型
        - [ ] 建立平面方程
        - [ ] 建立直线方程

      - [ ] 位置关系
  - [ ] 空间曲面与曲线
    - [ ] 旋转面
    - [ ] 柱面
    - [ ] 二次曲面
    - [ ] 空间曲线
    - [ ] 题型
      - [ ] 建立柱面方程
      - [ ] 建立旋转面方程
      - [ ] 建立空间曲线的投影曲线方程

多元函数微分学

- [ ] 多元函数的极限、性质、偏导数与全微分
  - [ ] 多元函数
  - [ ] 二元函数极限与连续
  - [ ] 二元函数偏导数与全微分
  - [ ] 题型
    - [ ] 二重极限
    - [ ] 二元函数连续性，偏导数存在性
    - [ ] 二元函数可微性
- [ ] 多元函数微分
  - [ ] 复合函数偏导数与全微分
  - [ ] 隐函数偏导数与全微分
  - [ ] 题型
    - [ ] 符合函数求偏导数与全微分
    - [ ] 隐函数求偏导数与全微分
- [ ] 极值与最值
  - [ ] 无条件极值
  - [ ] 条件极值
  - [ ] 题型
    - [ ] 无条件极值
    - [ ] 条件极值(最值)
    - [ ] 多元函数最大/小值
- [ ] 方向导数与梯度多元微分几何应用、泰勒定理
  - [ ] 方向导数
  - [ ] 梯度
  - [ ] 曲面的切平面与法线
  - [ ] 曲线的切线与法平面
  - [ ] 泰勒定理

- [ ] 题型
  - [ ] 有关方向导数与梯度
  - [ ] 有关曲面的切平面和曲线的切线
  - [ ] 泰勒定理

多元函数积分学

- [ ] 重积分
  - [ ] 二重积分
  - [ ] 三重积分
  - [ ] 题型
    - [ ] 二重积分计算
    - [ ] 累次积分交换次序及计算
    - [ ] 二重积分综合
    - [ ] 二重积分不等式
    - [ ] 三重积分
    - [ ] 三重积分累次积分
- [ ] 曲线积分
  - [ ] 弧长线积分
  - [ ] 坐标线积分
  - [ ] 题型
    - [ ] 弧长线积分
    - [ ] 坐标线积分
- [ ] 曲面积分
  - [ ] 面积的面积分
  - [ ] 坐标的面积分
  - [ ] 题型
    - [ ] 面积的面积分
    - [ ] 坐标的面积分
- [ ] 场论
  - [ ] 梯度
  - [ ] 通量
  - [ ] 散度
  - [ ] 旋度
  - [ ] 题型
    - [ ] 计算
- [ ] 多元积分的应用
  - [ ] 几何应用
  - [ ] 求物理量

无穷级数

- [ ] 常数项级数
    - [ ] 概念
    - [ ] 性质
    - [ ] 收敛性
    - [ ] 题型
        - [ ] 正项级数
        - [ ] 交错级数
        - [ ] 任意级数
        - [ ] 常数项级数
- [ ] 幂级数
    - [ ] 函数项级数及收敛域与和函数
    - [ ] 收敛半径、收敛区间、收敛域
    - [ ] 幂级数性质
    - [ ] 函数的幂级数展开
    - [ ] 题型
        - [ ] 幂级数收敛域
        - [ ] 函数展开为幂级数
        - [ ] 级数求和
- [ ] 傅里叶级数
    - [ ] 三角函数及正交性
    - [ ] 傅里叶级数
    - [ ] 收敛性定理
    - [ ] 周期2π函数的傅里叶展开
    - [ ] 周期2τ函数的傅里叶展开
    - [ ] 题型
        - [ ] 收敛定理
        - [ ] 展开为傅里叶级数

微分方程

- [ ] 概念、一阶与可降阶的二阶方程的解法
    - [ ] 定义
    - [ ] 特殊类型一阶微分方程
    - [ ] 可降阶的二阶方程
    - [ ] 题型
        - [ ] 按类型求解
        - [ ] 全微分
        - [ ] 积分化为微分方程
        - [ ] 偏微分化为常微分方程
        - [ ] 特殊函数

        - [ ] 微分方程的解
  - [ ] 二阶及高阶线性微分方程
    - [ ] 定义
    - [ ] 性质
    - [ ] 定理
    - [ ] 公式
    - [ ] 题型
      - [ ] 按类型求解
      - [ ] 变量代换
      - [ ] 分段函数或有绝对值的非齐次线性微分方程
      - [ ] 常系数线性非齐次方程的特解
      - [ ] 已知方程的解求方程
      - [ ] 非齐次与齐次微分方程对应解的关系
      - [ ] 欧拉方程
      - [ ] 积分方程、偏微分方程化为常微分方程
  - [ ] 微分方程的应用
    - [ ] 几何问题
    - [ ] 变化率问题
    - [ ] 牛顿第二定律
    - [ ] 微元法

线性代数

行列式

- [ ] 题型
  - [ ] 数字型计算
  - [ ] 抽象性计算
  - [ ] 行列式 |A| 是否为0的判断
  - [ ] 代数余子式求和

矩阵

- [ ] 矩阵概念及计算
  - [ ] 概念
  - [ ] 运算
  - [ ] 运算规则
  - [ ] 特殊矩阵
- [ ] 可逆矩阵
  - [ ] 概念
  - [ ] 可逆的条件

- [ ] 运算性质
- [ ] 求逆矩阵
- [ ] 初等变换、初等矩阵
  - [ ] 定义
  - [ ] 性质
- [ ] 矩阵的秩
  - [ ] 概念
  - [ ] 公式
- [ ] 题型
  - [ ] 概念及运算
  - [ ] 特殊方阵的幂
  - [ ] 伴随矩阵
  - [ ] 可逆矩阵
  - [ ] 初等变换、初等矩阵
  - [ ] 矩阵的秩

向量

- [ ] 概念及运算
- [ ] 线性表出、线性相关
- [ ] 极大线性无关组、秩
- [ ] 施密特正交化、正交矩阵
- [ ] 向量空间
- [ ] 题型
  - [ ] 线性相关判别
  - [ ] 线性表示
  - [ ] 线性相关、无关证明
  - [ ] 秩与极大线性无关组
  - [ ] 正交化、正交矩阵
  - [ ] 向量空间

线性方程组

- [ ] 克拉默法则
- [ ] 齐次线性方程组
- [ ] 非齐次线性方程组
- [ ] 题型
  - [ ] 概念题
  - [ ] 求解
  - [ ] 基础解系
  - [ ] $AX = 0$ 的矩阵A的系数行向量和解向量的关系

- [ ] 由$AX=0$的基础解析反求A
- [ ] 线性方程组中系数矩阵的列向量和解向量关系
- [ ] 两个方程组的公共解
- [ ] 同解方程组
- [ ] 杂题

特征值、特征向量、相似矩阵

- [ ] 特征值、特征向量
  - [ ] 特征值、特征向量
  - [ ] 特征方程、特征多项式、特征矩阵
  - [ ] 特征值的性质
  - [ ] 求特征值、特征向量
- [ ] 相似矩阵、相似对角化
  - [ ] 先死矩阵
  - [ ] 相似对角化的条件
  - [ ] 相似矩阵性质和条件
- [ ] 实对称矩阵相似对角化
  - [ ] 实对称阵
  - [ ] 特征值、特征向量、相似对角化
  - [ ] 实对称矩阵正交相似对角阵
- [ ] 题型
  - [ ] 求特征值、特征向量
  - [ ] 证明相同特征值
  - [ ] 特征向量
  - [ ] 是否能相似对角阵
  - [ ] 利用特征值、特征向量确定参数
  - [ ] 反求矩阵
  - [ ] 相似及相似标准形
  - [ ] 相似对角阵应用

二次型

- [ ] 二次型概念、矩阵表示
  - [ ] 概念
  - [ ] 二次型矩阵表示
- [ ] 化二次型为标准形、规范形 合同二次型
  - [ ] 标准型、规范形
  - [ ] 化成标准型、规范形
  - [ ] 合同矩阵、合同二次型
- [ ] 正定二次型、正定矩阵

- [ ] 题型
- [ ] 二次型矩阵表示
- [ ] 化为标准形
- [ ] 合同矩阵、合同二次型
- [ ] 正定性的判别
- [ ] 正定二次型证明
- [ ] 杂题

概率论与数理统计

随机事件和概率

- [ ] 事件、样本空间、事件关系和运算
- [ ] 概率、条件概率、独立性和五大公式
- [ ] 古典概型与伯努利概型

随机变量及其概率分布

- [ ] 随机变量及其分布函数
- [ ] 离散型随机变量和连续型随机变量
- [ ] 常用分布
- [ ] 随机变量函数分布

多维随机变量及其分布

- [ ] 二维随机变量及其分布
- [ ] 随机变量的独立性
- [ ] 二维均匀分布和二维正态分布
- [ ] 两个随机变量函数Z = g(X,Y)的分布

随机变量的数字特征

- [ ] 随机变量的数学期望和方差
- [ ] 矩、协方差和相关系数

大数定律和中心极限定理

数理统计的基本概念

- [ ] 总体、样本、统计量和样本数字特征
- [ ] 常用统计抽样分布和正态总体的抽样分布

参数估计

- [ ] 点估计
- [ ] 估计量的求法和区间估计

假设检验